Командная олимпиада

Младшая лига

1. (4) В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD описанная окружность треугольника BCD пересекает отрезок AD в точке E (отличной от A и D). Докажите, что описанная окружность треугольника ABE касается прямой BC.

(Baltic Way 2013)

2. (4) Можно ли среди чисел $\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{100}{1}$ выбрать три, произведение которых равно 1?

(Högstadiets Matematiktävling 1997/1998)

3. (6) В строке в некотором порядке записаны числа $1, 2, \ldots, n$. Пару чисел назовем *лункой*, если эти числа стоят рядом, либо между ними есть только числа, меньшие каждого из них. Каково наибольшее количество лунок? (Одно число может входить в несколько лунок.)

(А. Лебедев, А. Шаповалов)

4. (7) В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.

(А. Шаповалов)

5. (7) Натуральные числа a и b удовлетворяют соотношению $2a^2 + a = 3b^2 - b$. Докажите, что $a + b$ — точный квадрат.

(по мотивам Skolornas Matematiktävling 2014 Qualification Round)

6. (7) Точка I_b — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Другая вневписанная окружность касается стороны AB в точке C_1. Докажите, что точки B, C, C_1 и середина отрезка BI_b лежат на одной окружности.

(по мотивам олимпиады матмеха 2014)

7. (8) На доске написан многочлен $x^2 + x + 2014$. Саша и Федя ходят по очереди, начинает Федя. Федя каждым ходом должен увеличить или уменьшить коэффициент при x на 1, а Саша каждым ходом должен увеличить или уменьшить свободный член на 1. Федя выиграет, если в какой-то момент у многочлена будет целый корень. Докажите, что Саша не сможет помешать ему выиграть.

(India 2014)

8. (8) По кругу стоят 35 чисел. Любые два соседних отличаются не менее чем на 1. Докажите, что сумма квадратов всех чисел не меньше 10.

(Mathlinks)

9. (9) Для каких n выпуклый n-угольник можно разрезать на выпуклые шестиугольники?

(В. Быковский, А. Устинов)

Старшая лига

1. (3) Можно ли среди чисел $\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{100}{1}$ выбрать пять, произведение которых равно 1?

(Högstadiets Matematiktävling 1997/1998)

2. (5) В строке в некотором порядке записаны числа $1, 2, \ldots, n$. Пару чисел назовем *лункой*, если эти числа стоят рядом, либо между ними есть только числа, меньшие каждого из них. Каково наибольшее количество лунок? (Одно число может входить в несколько лунок.)

(А. Лебедев, А. Шаповалов)

3. (6) Точка I_b — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Другая вневписанная окружность касается стороны AB в точке C_1. Докажите, что точки B, C, C_1 и середина отрезка BI_b лежат на одной окружности.

(по мотивам олимпиады матмеха 2014)

4. (6) Докажите, что для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ положительных чисел найдется такой номер n, что $\frac{1+a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 + \frac{1}{n}$.

(фольклор)

5. (7) Сферы S_1, S_2 и S_3 касаются друг друга внешним образом и касаются некоторой плоскости в точках A, B и C. Сфера S касается сфер S_1, S_2 и S_3 внешним образом и касается данной плоскости в точке D. Докажите, что проекции точки D на стороны треугольника ABC являются вершинами правильного треугольника.

(фольклор)

6. (7) Через центр правильного треугольника ABC провели произвольную прямую l, пересекающую стороны AB и BC в точках D и E. Построили точку F такую, что $AE = FE$ и $CD = FD$. Докажите, что расстояние от точки F до прямой l не зависит от выбора этой прямой.

(М. Волчкевич)

7. (8) Для каких n выпуклый n-угольник можно разрезать на выпуклые шестиугольники?

(В. Быковский, А. Устинов)

8. (8) Многочлен $f(x)$ степени $2n-1$ с вещественными коэффициентами таков, что многочлен $(f(x))^2 - f(x)$ делится на многочлен $(x^2-x)^n$. Чему может равняться старший коэффициент многочлена $f(x)$?

(North Countries Universities Mathematical Competition 2014)

9. (10) В куче лежит $n > 1$ камней. Двое по очереди берут из кучи камни. Первым ходом можно взять любое количество камней от 1 до $n - 1$. Каждым следующим ходом можно брать любое количество камней от 1 до $2k$, где k — количество камней, взятых на предыдущем ходу противником. Выигрывает взявший последний камень. Определите, при каких n второй игрок имеет выигрышную стратегию.

(Brazil NMO 2014)